كلية العلوم التطبيقية

قسم الفيزياء الحياتية

المرحلة الثالثة

الإلكترونيات

أ.م.د. غسان عدنان الهيتي

- المحاضرة الثالثة عشر -

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

خارطة كارنو من ثلاثة متغيرات AوBوC:

لإنشاء خارطة كارنو من ثلاثة متغيرات AوBوC نتبع الخطوات التالية:

١- نرسم خارطة كارنو صماء مرتبة عليها المتغيرات ومتمماتها كما في الشكل (35a).

٢- عموديا نرتب على التوالي $\bar{A}\,\bar{B}$ و $\bar{A}\,B$ و $A\,B$ و $A\,\bar{B}$ حيث نلاحظ إن الترتيب ليس متسلسلا حسب النظام الثنائي وإنما هو إلى حد كبير رمز كري 00و01و11و10 أي تغيير حالة متغير واحد في كل مرة ، وليس بالضرورة الالتزام حرفيا بهذا الترتيب إنما المهم هو تغير حالة متغير فقط بين كل خطوتين متجاورتين أفقيا وعموديا.

٣- يتم إسقاط المتغير الثالث $\bar{C}$ و C أفقيا.

جدول (20)

A	B	c	Y	نتاجـــــات أساسية
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\bar{A}\,B\,\bar{C}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$A\,B\,\bar{C}$
1	1	1	1	$A\,B\,C$

نلاحظ أيضا إن عدد المواقع على خارطة كارنو يساوي عدد حالات جدول الحقائق

(a)

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\,\bar{B}$		
$\bar{A}\,B$		
$A\,B$		
$A\,\bar{B}$		

(b)

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\,\bar{B}$		
$\bar{A}\,B$	1	
$A\,B$	1	1
$A\,\bar{B}$		

(c)

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\,\bar{B}$	0	0
$\bar{A}\,B$	1	0
$A\,B$	1	1
$A\,\bar{B}$	0	0

شكل(35): خارطة كارنو لجدول الحقائق رقم (20).

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

٤- نضع 1 في الموقع التي تعود إلى نتاجات أساسية حقيقية وفي جدول الحقائق رقم (20) للإدخالات: $A\,B\,C = 010$ و $A\,B\,C = 110$ و $A\,B\,C = 111$ كما في الشكل (35b).

٥- نملأ الشواغر بالآصفار لنحصل على الشكل النهائي لخارطة كارنو كما في الشكل (35c).

خرائط كارنو ذات المتغيرات الأربعة:

لإنشاء خارطة كارنو من أربعة متغيرات A وB وC و D نتبع الخطوات التالية:

١- نرسم خارطة كارنو صماء عن طريق ترتيب المتغيرات ومتمماتها أفقيا وعموديا كما في الشكل (36a).يتضمن الترتيب العمودي: $\bar{A}\,\bar{B}$ و $\bar{A}\,B$ و $A\,B$ و $A\,\bar{B}$ على التوالي.أما الترتيب الأفقي فهو: $\bar{C}\,\bar{D}$ و $\bar{C}\,D$ و $C\,D$ و $C\,\bar{D}$ المشابهين لترتيب كري.

٢- من الجدول لرقم (21)نلاحظ أن Y تساوي (1) للإدخالات التالية: $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,D = 0001$ و $\bar{A}\,B\,C\,\bar{D} = 0110$ و $\bar{A}\,B\,C\,D = 0111$ و $A\,B\,C\,\bar{D} = 1110$.

٣- تسقيط الآحاد في المواقع كما في الشكل(36b).

٤- يتم ملأ الشواغر بالإصغار فنحصل على الشكل (36a).الذي يمثل وضع الخارطة النهائي.

جدول (21)

A	B	c	d	Y	نتاجات أساسية
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,D$
0	0	1	0	0	
0	1	0	0	0	
1	0	0	0	0	
0	0	1	1	0	
0	1	0	1	0	
0	1	1	0	1	$\bar{A}\,B\,C\,\bar{D}$
0	1	1	1	1	$\bar{A}\,B\,C\,D$
1	0	0	1	0	
1	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	$A\,B\,C\,\bar{D}$
1	1	1	1	0	

(a)

	$\bar{C}\,\bar{D}$	$\bar{C}\,D$	$C\,D$	$C\,\bar{D}$
$\bar{A}\,\bar{B}$				
$A\,B$				
$A\,\bar{B}$				
$A\,\bar{B}$				

(b)

	$\bar{C}\,\bar{D}$	$\bar{C}\,D$	$C\,D$	$C\,\bar{D}$
$\bar{A}\,\bar{B}$		1		
$A\,B$			1	1
$A\,\bar{B}$				1
$A\,\bar{B}$				

(c)

	$\bar{C}\,\bar{D}$	$\bar{C}\,D$	$C\,D$	$C\,\bar{D}$
$\bar{A}\,\bar{B}$	0	1	0	0
$A\,B$	0	0	1	1
$A\,\bar{B}$	0	0	0	1
$A\,\bar{B}$	0	0	0	0

شكل(36): خارطة كارنو لجدول الحقائق رقم (21).

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

الأزواج والرباعيات والثمانيات

عند التمعن في الشكل (37a) نجد زوجا Pair من ال1 يجاور احدهما الآخر أفقيا. الأول يمثل $A\,B\,C\,D$ والثاني يمثل $A\,B\,C\,\overline{D}$ وعند الانتقال من الأول إلى الثاني أو بالعكس نجد أن احد المتغيرات الأربعة يتمم نفسه (D إلى $\overline{D}$)بينما تحافظ بقية المتغيرات الثلاثة على حالاتها(AوBوC)، نقوم بحذف كل متغير يتمم نفسه ويمكن برهنة ذلك من خلال:معادلة الشكل(37)هي:

$$Y = A\,B\,C\,D + A\,B\,C\,\overline{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

$$Y = A\,B\,C\,(D + \overline{D})$$

$$Y = A\,B\,C\,(\,1\,) = A\,B\,C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

كل زوج من ال1المتجاورة يقود إلى إسقاط المتغير الذي تتغير حالته مع الاحتفاظ بالباقي. ولتسهيل عملية تشخيص الحالات المتجاورة يعمد إلي إحاطتها بخط متميز كما في الشكل (37b) وبالتالي فان ما سيحتويه السياج سيكون حدا واحدا $A\,B\,C$ بدلا من حدين $(A\,B\,C\,D + A\,B\,C\,\overline{D})$. وتجدر الإشارة إلى إن الاختصار لا يتم إلا بتجاور أفقي أو عمودي ولا ينطبق ذلك على التجاور القطري.

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}\,D$	$C\,D$	$C\,\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	0	0
$A\,B$	0	0	1	1
$A\,B$	0	0	0	0
$A\,\overline{B}$	0	0	0	0

(a)

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}\,D$	$C\,D$	$C\,\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	0	0
$A\,B$	0	0	1	1
$A\,B$	0	0	0	0
$A\,\overline{B}$	0	0	0	0

(b)

شكل (37):خارطة كارنو تحوي زوجا من ال1.

يتألف الرباعي من تجاور أربعة من ال1أفقيا أو عموديا وقد يكون التجاور على استقامة واحدة كما في شكل (38a) أو على صفين كما في شكل (38b).

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}\,D$	$C\,D$	$C\,\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	0	0
$A\,B$	0	0	0	0
$A\,B$	1	1	1	1
$A\,\overline{B}$	0	0	0	0

(a)

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}\,D$	$C\,D$	$C\,\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	0	0
$A\,B$	0	0	0	0
$A\,B$	0	0	1	1
$A\,\overline{B}$	0	0	1	1

(b)

شكل (38): خارطة كارنو تحوي رباعا من ال1.

وأيا كانت نوعية التجاور فانه يفيد في إسقاط متغيرين اثنين.ويمكن اعتبار الشكل (38a) مكونا من زوجين اثنين ،فالزوج الأيسر يمثل $A\,B\,\overline{C}$ بينما يمثل الزوج الأيمن $A\,B\,C$ فتكون المعادلة كالآتي:

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$Y = AB\overline{C} + ABC = AB(C+\overline{C}) = AB(1) = AB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

وبذلك تم إسقاط المتغيرين D و C لنحصل على AB فقط ،ولا حاجة إلى تكرار البرهان الجبري بل يتم الاختصار المباشر من خارطة كارنو..أما بالنسبة للشكل (38b) فنبدأ بأي (1) ونسير أفقيا لنسقط المتغير D وعموديا لنسقط المتغير B ليبقى A و C ولتكون المعادلة:

$$Y = AC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

وعند اتحاد زوج من الرباعيات يتشكل ألثمان كما نلاحظ ذلك من الشكل (39a) .والثمان يسقط ثلاثة متغيرات مع متمماتها وبذلك يبقى متغير واحد فقط .فلو جزءنا ألثمان في الشكل(39a) إلى رباعيين كما في الشكل(39b) فان المعادلة ستكون:

$$Y = A\overline{C} + AC = A(C+\overline{C}) = A(1) = A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
AB	1	1	1	1
$A\overline{B}$	1	1	1	1

(a)

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
AB	1	1	1	1
$A\overline{B}$	1	1	1	1

(b)

شكل (39): خارطة كارنو تحوي ثمان من ال1.

وهكذا نلاحظ إن ألثمان يختصر الناتج إلى متغير واحد من أصل أربعة متغيرات.حيث يتم الحذف و الاختصار بالبدء بأول (1) في ألثمان ثم إسقاط كل متغير يتمم نفسه.

تبسيط كارنو:

عرفنا إن الزوج من ال1 في خارطة كارنو يسقط متغيرا واحدا وان الرباعي يسقط متغيرين وان ألثمان يسقط ثلاثة متغيرات ، وعليه وعند رسم خارطة كارنو نبدأ بحصر ألثمان فالرباعي فالزوج كي نحصل على ابسط النتائج.

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	1	1	1
AB	0	0	0	1
AB	1	1	0	1
$A\overline{B}$	1	1	0	1

(a)

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	1	1	1
AB	0	0	0	1
AB	1	1	0	1
$A\overline{B}$	1	1	0	1

(b)

شكل (40): خارطة كارنو تحوي زوجا من ال1 ورباعيين احدهما مربع والآخر عمودي.

لنأخذ خارطة كارنو في شكل (40a) والتي تم تثبيت ال1 فيها اعتمادا على جدول الحقائق .نبحث أولا عن إمكانية الحصول على ثمان ولعدم وجوده نبحث بعدئذ عن الباع لنجد اثنين منه ولنجد أيضا زوجا متجاورا من ال1 كما هو واضح في شكل (40b). من الزوج نحصل على الحد المبسط $\overline{A}\,\overline{B}D$ ، ومن الرباعي (المربع الشكل) نحصل على $A\overline{C}$ ، أما الرباعي العمودي فيعطينا $C\overline{D}$ وبإدخالهم بوابة (OR) نحصل على المعدلة الآتية:

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}D + A\overline{C} + C\overline{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
AB	0	1	0	0
AB	1	1	1	1
$A\bar{B}$	1	1	1	1

(a)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
AB	0	1	0	0
AB	1	1	1	1
$A\bar{B}$	1	1	1	1

(b)

شكل (41):خارطة كارنو تظهر خاصية التشابك Overlapping.

وبالإمكان إشراك ال1أكثر من مرة جريا وراء التبسيط والشكل (41a) يوضح ذلك تارة بالاستفادة من ال1 أكثر من مرة ،حيث نحصل على:

$$Y = A + B\bar{C}D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

وتارة أخرى بعدم إشراك ال1 في التبسيط كما في الشكل (41b)حيث نحصل :

$$Y = A + \bar{A}B\bar{C}D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

حيث يلاحظ إن إشراك ال1أعطانا معادلة ابسط. لذلك نسعى دائما نحو أفضل تبسيط ممكن من خلال الاستفادة من إمكانية التبسيط بالتشابك Overlapping.

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
AB	1	0	0	1
AB	1	0	0	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

(a)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
AB	1	0	0	1
AB	1	0	0	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

(b)

شكل (42):خارطة كارنو تظهر خاصية اللف Rolling.

ومن الأشياء الأخرى التي ينبغي معرفتها هي خاصية اللف Rolling في خارطة كارنو ،فالزوجات في شكل (42a)ينتجان المعادلة:

$$Y = B\bar{C}\bar{D} + BC\bar{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

فإذا تخيلنا أن حافتي الخارطة تلتقيان فان $C\bar{D}$ تجاور $\bar{C}\bar{D}$ كما في شكل(42b)،ومن ثم يمكن اعتبار هذين الزوجين رباعيا واحدا للحصول على المعادلة الآتية:

$$Y = B\bar{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

ويمكن إثبات ذلك رياضيا من خلال البرهان التالي :

$$Y = B\bar{C}\bar{D} + BC\bar{D} = B\bar{D}(\bar{C} + C) = B\bar{D}(1) = B\bar{D} \quad \ldots (36)$$

لذلك يمكن اعتبار إن الحافة اليمن في خارطة كارنو تجاور الحافة اليسرى والحافة العليا تجاور الحافة السفلى ومن هذه الظاهرة مع خاصية التشابك نستطيع استخلاص ابسط الأشكال.كما في الشكل (43).

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	0	0
AB	1	1	0	1
AB	1	1	0	1
$A\bar{B}$	1	1	0	0

(a)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	0	0
AB	1	1	0	1
AB	1	1	0	1
$A\bar{B}$	1	1	0	0

(b)

الشكل (43): خارطة كارنو تظهر خاصيتي اللف Rolling والتشابك Overlapping.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

مثال (7): يرينا الشكل (44) خارطة كارنو بثلاثة حلول.
في شكل (44a) نحصل على المعادلة:

$$Y = \bar{C} + \bar{A}C\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

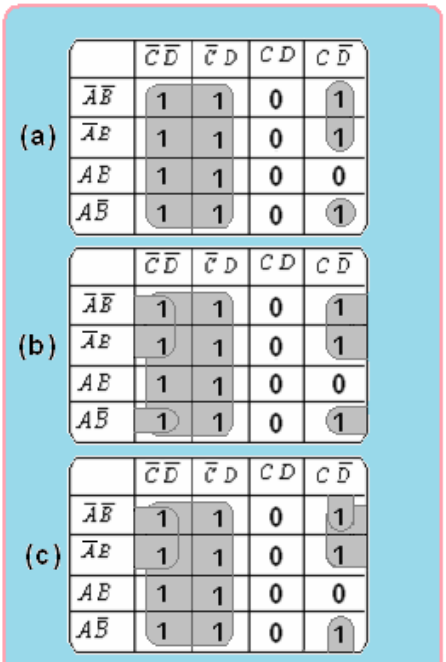
أما الشكل (44b) فنحصل على معادلة ابسط هي:

$$Y = \bar{C} + \bar{A}\bar{D} + A\bar{B}\bar{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

أما الشكل (44c)فنحصل منه على المعادلة نفسها وبحل آخر:

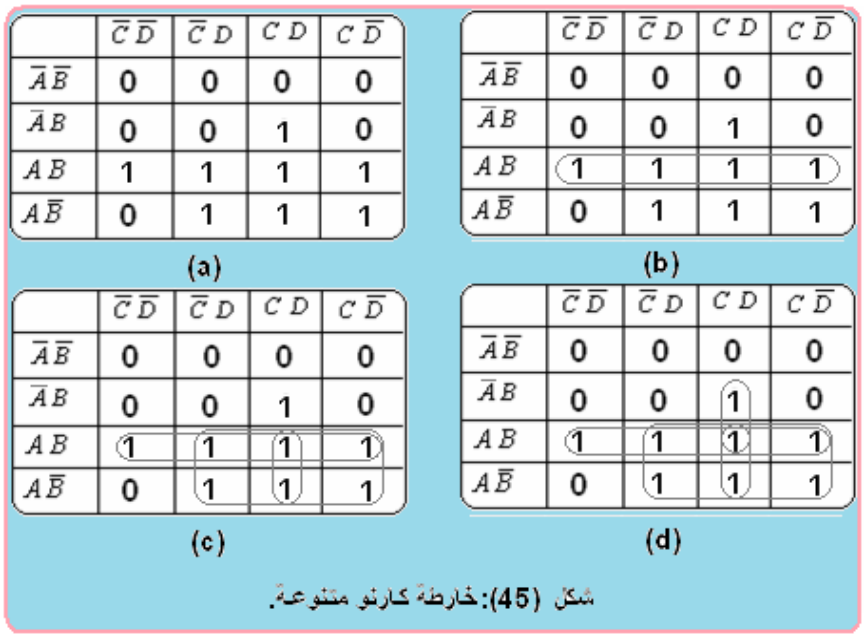
$$Y = \bar{C} + \bar{A}\bar{D} + \bar{B}C\bar{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

حيث نلاحظ عدم وجود فرق بين المعادلتين (38) و(39) من حيث عدد أطراف الإدخال.
ونلخص ما يلي طريقة تبسيط المعادلة البولينية باستعمال خارطة كارنو:
١- يتم تثبيت ال1على الخارطة لكل نتاج أساسي حقيقي ،وإملاء الشواغر بالا صفار.
٢- تحديد الثمانيات فالرباعيات فالأزواج واستعمال خاصيتي اللف والتشابك إن تطلب الأمر ذلك.
٣-تحديد كل (1)منعزل على نفسه.
٤-استعراض المجاميع ويتم حذف كل مجموعة اشتركت جميع عناصرها مع مجموعات أخرى.
٥- كتب المعادلة البولينية عن طريق جمع الحدود ببوابة (OR).



شكل (44):خارطة كارنو بثلاثة حلول.

مثال (8):ما هي المعادلة البولينية المبسطة لخارطة كارنو في شكل (45a).



شكل (45):خارطة كارنو متنوعة.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

الحل:

لا تحتوي خارطة كارنو في شكل (45a)على ثمان بل هناك رباعي أفقي كما في شكل (45b) ومن خلال استعمال خاصية التشابك نحصل على رباعيين آخرين كما في شكل (45c)،وثمة زوج يظهر من اشتراك ال1 المتبقي مع جاره كما في الشكل (45d). وباستعراض مجاميع الخارطة نلاحظ أن جميع المجاميع ضرورية ولا يمكن حذف أية مجموعة منها لانعزال بعض عناصر كل مجموعة عن الاندماج بمجموعة أخرى.

يشكل الرباعي الأفقي الحد AB أما الرباعيين المتشابكين فيشكلان الحدين AC و AD ، وإما الزوج فيشكلان الحد BCD لنحصل على المعادلة:

$$Y = AB + AC + AD + BCD \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com