محدد المصفوفة (Determinant of Matrix)

اذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فأن المقدار $a.d - b.c$ يسمى **محدد المصفوفة A** ويرمز بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ويكتب بالصيغة $|A|$ ، تجدر الأشارة الى انه المقدار $a.d - b.c$ هو عبارة عن حاصل ضرب العنصرين الواقعين على القطر الرئيسي في المصفوفة A مطروحاً منه حاصل ضرب العنصرين الواقعين على القطر الثانوي . كما أن الخطين | .| لا يرمز للقيم المطلقة.

مثال:-

أذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ جد قيمة $|A|$

الحل:

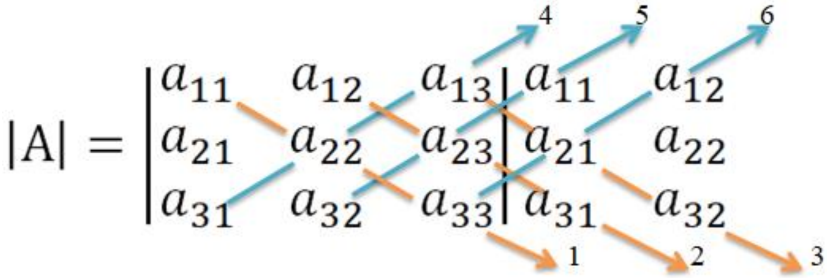
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(3) = -2$$

أما اذا كانت المصفوفة من الدرجة الثالثة فطريقة حساب المحدد لها تختلف بعض الشيء عن طريقة حساب المحدد للمصفوفة من الدرجة الثانية .

لتكن المصفوفة A كلأتي $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

لأيجاد قيمة المحدد للمصفوفة A نتبع الطريقة التالية

نكتب المصفوفة المعطاه ثم نعيد كتابة العمود الأول والثاني ونظيفها للمحددة بحيث يمثلان العمودين الرابع والخامس كما مبين ادناة



تضرب عناصر الأسهم 1 ،2 ،3 ثم تجمع مع بعضها ومن ثم وتطرح من حواصل ضرب الأسهم 4 ،5 ، 6 كما في المعادلة التالية

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

<u>مثال</u>:-

أذا كانت لديك المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ فأوجد $|A|$

<u>الحل</u>:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$
$$= (1)(5)(9) + (2)(6)(7) + (3)(4)(8)$$
$$-(7)(5)(3) - (8)(6)(1) - (9)(4)(2) = 0$$

• المعامل المرافق للعنصر

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n ومحددتها $|A|$ فأذا حذفنا من المصفوفة A الصف i والعمود j فأننا نسمي محدد المصفوفة المربعة من الدرجة (n-1) الناتجة **بالمحدد للعنصر** a_{ij} ونرمز له بالرمز $|M_{ij}|$ ويكتب كلأتي $\boldsymbol{\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|}$

مثال:-

لديك المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ جدة المعامل المرافق للعنصر $(\alpha_{11}, \alpha_{12})$

الحل:

لحساب α_{11} نحذف الصف الأول والعمود الأول فيبقى لدينا العدد 7 فقط $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$

وبتطبق القانون

$$\boldsymbol{\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{M}_{ij}|}$$

فأن

$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}|7| = 7$

لحساب α_{12} نحذف الصف الأول والعمود الثاني فيبقى لدينا العدد 2 فقط $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$

وبتطبق القانون اعلاه فأن

$\alpha_{11} = (-1)^{1+2}|2| = -2$

• طريقة أخرى لحساب المحدد للمصفوفة (طريقة كاوس)

يمكن حساب المحدد للمصفوفة A من الدرجة n بضرب العناصر في اي صف او عمود في معاملاتها المرافقة وجمع حواصل الضرب الناتجة .

مثال:-

جد قيمة المحدد للمصفوفة التالية بطريقة كاوس $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

الحل:

لايجاد قيمة المحدد للمصفوفة A فأن $|\mathrm{A}| = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13}$

حيث

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = (1)[(4)(7) - (5)(6)] = -2$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (-1)[(3)(7) - (5)(5)] = 4$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (1)[(3)(6) - (4)(5)] = -2$$

$$\therefore\ |\mathrm{A}| = (1)(-2) + (0)(4) + (2)(-2) = -6$$

واذا تم حلها بالطريقة الاولى طريقة الأسهم فسنحصل على نفس النتيجة

$$|\mathrm{A}| = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{matrix} \quad = 28 + 0 + 36 - 40 - 30 - 0 = -6$$

• المصفوفات المرافقة (Adjugate Matrix)

اذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان α_{ij} المعامل المرافق للعنصر a_{ij} فأننا نسمي المصفوفة التالية المصفوفة المرافقة للمصفوفة A

$$\boldsymbol{adj}(\mathrm{A}) = \left(\left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha_{11}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{nn}} \end{pmatrix}\right]\right)^{\boldsymbol{T}}$$

مثال:-

اذا كانت المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ فجد $adj(\mathrm{A})$

الحل:

من تعريف المصفوفة المرافقة فيما سبق

$$adj(\mathrm{A}) = \left(\left[\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \right] \right)^T$$

الخطوة الاولى نجد قيم α_{ij} للكل (i= 1,2,3 j=1,2,3) كون المصفوفة المعطاه في السؤال (3×3)

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6 \quad , \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \quad , \quad \alpha_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5 \quad , \quad \alpha_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad , \quad \alpha_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\alpha_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$adj(\mathrm{A}) = \left(\left[\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \right] \right)^T = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال:-

اذا كانت المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ فجد $adj(\mathrm{A})$

الحل:

واجب بيتي (H.W.)