• معكوس المصفوفة (Inverse of Matrix)

اذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان بالأمكان ايجاد مصفوفة مربعة B في نفس الدرجة بحيث ان $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$ فيقال أن A قابلة للأنعكاس وتسمى B معكوس للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز $(\mathbf{A}^{-1})$ ويمكن ملاحظة النقاط التالية.

1- يعرف معكوس المصفوفة فقط للمصفوفات المربعة.
2- اذا كانت A معكوس للمصفوفة B فأن B هي ايضاً معكوس للمصفوفة A .
3- اذا كانت A لها معكوس عندئذ يقال أن Aقابلة للأنعكاس .
4- اذا كانت A لها معكوس عندئذ هناك معكوس واحد فقط.
5- ليست جميع المصفوفات المربعة لها قابلية الأنعكاس.

مثال:-

المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ هي معكوس للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

وذلك لأن $AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

وكذلك $BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

وعليه فأن $AB = BA = I_2$

مثال:-

جد المصفوفة المعكوسة للمصفوفة التالية اذا كانت لديها مصفوفة معكوسة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

الحل:

اذا كانت A لها معكوس عندئذ توجد المصفوفة التالية $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

بحيث أن $AB = BA = I_2$

اذن المعادلة $AB = I$ يمكن كتابتها

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 2b_{11} + 3b_{21} & 2b_{12} + 3b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبما ان المصفوفتان متساويتان فعندئذ العناصر المتناظرة متساوية ايضاً

$$b_{11} + 2b_{21} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$b_{12} + 2b_{22} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$2b_{11} + 3b_{21} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$2b_{12} + 3b_{22} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

وبحل المعادلات اعلاه انياً نجد ان

$$b_{11} = -3 \quad , \quad b_{12} = 2 \, , \qquad b_{21} = 2 \quad , \quad b_{22} = -1$$

وعليه فأن المصفوفة B ستكون كما يلي $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ومن الممكن اثبات ان $B = A^{-1}$

<u>تمارين</u>

1- اذا كانت لديك المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ جد معكوس المصفوفة لها ان وجد ؟

2- لتكن لديك المصفوفتان

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad ، \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

أثبت أن $AB = I_3$

• طريقة أخرى لأيجاد معكوس المصفوفة

اذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n قابلة للأنعكاس فأن معكوس المصفوفة A والذي يرمز له بالرمز $(\mathbf{A^{-1}})$ يمكن ايجاده كما يلي .

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|}\, \boldsymbol{adj}(\mathbf{A})$$

<u>مثال</u>:-

جد A^{-1} للمصفوفة A في المثال السابق
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>الحل</u>:

في المثال السابق تم حساب المصفوفة المرافقة $adj(A)$ فلا داعي لتكرار ايجادها بالتفصيل وهي

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

يتبقى لنا ايجاد قيمة المحدد للمصفوفة A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{matrix}$$

=(1)(3)(4)+(2)(2)(3)+(3)(2)(3)

-(3)(3)(3)-(3)(2)(1)-(4)(2)(2)

=12+12+18-27-6-16= 42 - 49= -7

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{(-7)}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-6}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

تمارين

1- هل المصفوفتان $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ هل احدهما معكوس الأخر ام غير ذلك ؟

2- لديك المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad ، \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad ، \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

جد

أ) محددات هذه المصفوفات بأستخدام طريقة الأسهم.
ب) محددات هذه المصفوفات بأستخدام معاملاتها المرافقة.
ت) المصفوفة المرافقة لكل من هذه المصفوفات .
ث) معكوس المصفوفة ($\mathbf{A^{-1}}$, $\mathbf{B^{-1}}$, $\mathbf{C^{-1}}$)

• طريقة المصفوفات لحل المعادلات الخطية بأستخدام معكوس المصفوفة

اذا كان $AX = B$ نظاماً لمعادلات خطية مكونه من n من المتغيرات بحيث $|A| \neq 0$ يكون للنظام حل هو $X = A^{-1}B$

مثال:-

حل المعادلات الخطية التالية بطريقة معكوس المصفوفة

$$2x + 8y = -4$$

$$x + 3y = 5$$

الحل:

تكتب المعادلات اعلاه بصيغة المصفوفات ويراعى فيها ترتيب العناصر في المصفوفة والمتغيرات x ,y والقيم الاخرى.

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

نجد قية $|A| = -2$ ونلاحظ انها لا تساوي صفر

من القانون

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

نجد بعد ذلك قيم $\alpha_{22} = 2$ ، $\alpha_{21} = -8$ ، $\alpha_{12} = -1$ ، $\alpha_{11} = 3$

ثم نكتب المصفوفة المرافقة $adj(A)$ بعد عكس الصفوف اعمدة (Transpose of matrix)

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ثم بعد ذلك نجد A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj(A) = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

نعود الى الصيغة

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

اذا $x = 26$ ، $y = -7$

• قاعدة كرامر لحل المعادلات الخطية Cramer's Rule

اذا كان AX =B نظاماً لمعادلات خطية مكونه من n من المتغيرات بحيث $|A| \neq 0$ يكون للنظام حل هو $j = 1,2,3, \dots \dots \dots n$ $\quad \mathbf{X}_j = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|}$

حيث $|\mathbf{A}_j|$ هي محدد المصفوفة الناتجة من ابدال عناصر العمود j للمصفوفة A بعناصر العمود B

مثال:-

حل المعادلات الخطية التالية $y - 5 = -x$, $3x - y = 2$

الحل:

نرتب المعادلتين على النحو التالي

$$3x - y = 2$$

$$x + y = 5$$

ونكتب النظام بصيغة المصفوفات

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

نجد قية $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$ ونلاحظ انها لا تساوي صفر

بعد ذلك نجد قيم

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

وعلية تكون قيم y , x كا لأتي $x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{7}{4}$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{13}{4}$$

مثال:-

حل المعادلات الخطية التالية بأستخدام المحددات (كرامر)

$$5x - 6y = -4z + 15$$

$$4y + 7x - 19 = 3z$$

$$y + 6z - 46 = -2x$$

الحل:

نرتب المعادلات على النحو التالي

$$5x - 6y + 4z = 15$$

$$7x + 4y - 3z = 19$$

$$2x + y + 6z = 46$$

نجد قية $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 7 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 419$ ونلاحظ انها لا تساوي صفر

بعد ذلك نجد قيم $|A_1| = \begin{vmatrix} 15 & -6 & 4 \\ 19 & 4 & -3 \\ 46 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1257$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 15 \\ 7 & 4 & 19 \\ 2 & 1 & 46 \end{vmatrix} = 2514 \quad , |A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 15 & 4 \\ 7 & 19 & -3 \\ 2 & 46 & 6 \end{vmatrix} = 1676$$

وعلية ستكون قيم z, y , x كما لأتي

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1257}{419} = 3 \quad , \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1676}{419} = 4 \quad , \quad z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{2514}{419} = 6$$

تمارين

حل المعادلات الخطية التالية بأستخدام طريقة كرامر ومعكوس المصفوفة

1)

$$x + 2y = -3z + 5$$

$$5y + 2x - 3 = -3z$$

$$8z - 17 = -x$$

2)

$$-x_1 + 2x_2 = 3x_3 - 8$$

$$-x_2 + 2x_1 + 4x_3 = 17$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 22$$