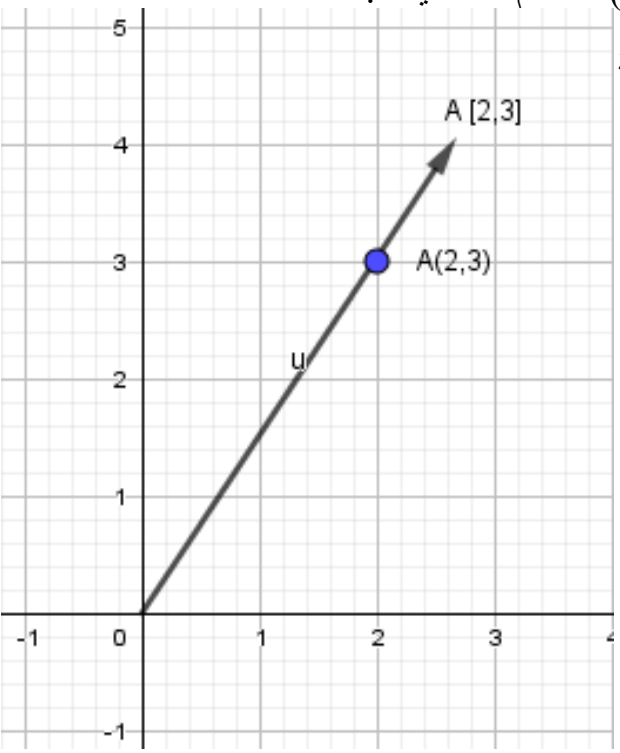
المتجهات (The Vectors)

• المتجهات الصفية (Row Vectors)

عرفت في علم الفيزياء كميات مثل الحرارة والحجم والكتلة وكل منها تميز بقيمتها التي هي عدد حقيقي ويطلق عليها مقادير قياسية (scalar) وعرفت كميات أخرى مثل القوة والتعجيل والسرعة تسمى كميات متجهة وتتميز بأن لها قيم (magnitude) واتجاه (direction).

ويعبر عن المتجه في المستوى او الفضاء بخط مستقيم طوله يتناسب مع قيمته وفيه رأس سهم يمثل اتجاهه كما في الشكل ادناه . المستقيم (OA) يصل بين نقطة الأصل O والنقطة A(2,3) ويتجه من النقطة الأولى الى الثانية ويرمز له V ويكتب بالشكل V=[2,3] واحياناً لا تكتب الفارزة بينهما V=[2 3] وتستخدم الأقواس الكبيرة [ ] اما الأقواس الصغيرة ( ) تستخدم للأحداثيات .



يعرف المتجة الصفي : بأنه عبارة عن مجموعة اعداد حقيقية مرتبة مفصولة عن بعضها بفوارز او بدون فوارز داخل قوسين كبيرين

ويطلق على كل عدد في المتجه مركبة (component) او عنصر (element). ادناه مجموعة لأمثلة لمتجهات صفية

1) [-1 7] حيث يتكون من مركبتين
2) [2 -5 3] يتكون من ثلاث مركبات
3) [5 11 0 -2] يتكون من اربع مركبات
4) [-6 , b , 0.5 , -3 , a] يتكون من ست مركبات

فأذا كان المتجه الصفي مكون من n من المركبات فيقال عنه متجه من المرتبة n (n order) . كما يقودنا هذا الى ان مركبات المتجه هي مقادير كمية يمثل كل منها شيء يختلف عن الأخر . فلو اخذنا متوازي مستطيلات طوله (5m) وعرضه (3m) وارتفاعه (2m) فبأمكاننا ان نعبر عن ابعاده الثلاث بالمتجه [2 3 5] ولو أخذنا مخزناً للطعام يحتوي (100) صندوق من الطماطة و (80) صندوق من التفاح و (120) صندوق برتقال و (10) صناديق من الليمون لذا تكتب بصيغة المتجة الصفي [10 120 80 100]. يرمز للمتجه بحرف كبير ولكن مركباته بحرف صغير مع رقم يطلق عليه دليل مثال على ذلك $A = [a_1 , a_2 , a_3 , \dots \dots \dots \dots , a_n]$ يتساوى المتجهان الصفيان اذا وفقط كانا من نفس الدرجة وكان مركباتهما المتناظرة متساوية.

- **المتجهات العمودية (Column Vectors)**

المتجه العمودي هو مجموعة اعداد حقيقية مرتبة بشكل عمود واحد مثال على ذلك المتجه A من المرتبة n الذي مركباته $a_1 , a_2 , a_3 , \dots \dots \dots , a_n$ ويكتب بالشكل التالي

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

وينطبق ما شرح عن المتجه الصفي على المتجه العمودي

مثال:-

لتكن A , B , C متجهات وكالاتي [-3 , -2]=C [-3 2.5]=B [-3 $\frac{10}{4}$]=A بين اي منهما متساويان .

الحل:

من ملاحظة المتجهات الثلاثة نجد ان A=B لان العنصر $\frac{10}{4} = 2.5$ وهو مساوي لنظيره من B اما $A \neq C$ وكذلك $B \neq C$

مثال:-

جد قيمة x , y اذا علمت ان المتجه A يساوي المتجه B

A=[-4 -12 3y] B=[2x -12 7]

الحل:

من تساوي المتجهات يتبين لنا

$$2x = -4 \qquad \therefore x = -2$$

$$3y = 7 \qquad \therefore y = \frac{7}{3}$$

• العمليات الجبرية للمتجهات

العمليات الجبرية التي يمكن اجرائها على المتجهات هي الجمع والطرح والضرب بين المتجهات (الصفية والعمودية) وبين المتجه ومقدار كمي . اذا كانت لدينا المتجهات التالية .

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$A = [a_1 , a_2 , a_3 , \dots\dots\dots\dots , a_n]$$

$$B = [b_1 , b_2 , b_3 , \dots\dots\dots\dots , b_n \ ]$$

فأن

$$A + B = [a_1 + b_1 \ , \ a_2 + b_2 \ , a_3 + \ b_3, \dots\dots\dots\dots , a_n + b_n]$$

$$A - B = [a_1 - b_1 \ , \ a_2 - b_2 \ , a_3 - \ b_3, \dots\dots\dots\dots , a_n - b_n]$$

$$C + D = \begin{bmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n + d_n \end{bmatrix} \qquad C - D = \begin{bmatrix} c_1 - d_1 \\ c_2 - d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n - d_n \end{bmatrix}$$

اما الضرب بثابت وليكن 2

$$2A = [2a_1 , 2a_2 , 2a_3 , \dots\dots\dots\dots , 2a_n]$$

$$2D = \begin{bmatrix} 2d_1 \\ 2d_2 \\ \vdots \\ 2d_n \end{bmatrix}$$

اما الضرب بين متجهين احدهما متجه صفي والاخر متجه عمودي فيكون

$$A \cdot C = [a_1 , a_2 , a_3 , \dots \dots , a_n] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \cdots \dots + a_nc_n$$

مثال:-

جد ناتج الجمع وكذلك الطرح بين المتجهين A , B $A = [2 \ \ 4 \ \ -7 \ \ 0]$
$B = [5 \ \ 6 \ \ 11 \ \ -4]$

الحل:

$$A + B = [2 + 5 \ \ 4 + 6 \ \ -7 + \ 11 \ \ \ 0 - 4] = [7 \ \ 10 \ \ 4 \ \ -4]$$

$$A - B = [2 - 5 \ \ \ 4 - 6 \ \ \ -7 - \ 11 \ \ \ \ 0 + 4] = [-3 \ \ \ -2 \ \ \ -18 \ \ \ 4]$$

مثال:-

اذا كانت $A = [2 \ \ \ 4 \ \ \ -7 \ \ \ 0 \ ]$ جد 3A , -2A

الحل:

$$3A = [3 \times 2 \ \ \ 3 \times \ 4 \ \ \ 3 \times -7 \ \ \ \ 3 \times \ 0] = [6 \ \ \ 12 \ \ \ -21 \ \ \ \ 0]$$

$$-2A = [-2 \times 2 \ \ \ -2 \times \ 4 \ \ \ -2 \times -7 \ \ \ \ -2 \times \ 0]$$
$$= [-4 \ \ \ -8 \ \ \ 14 \ \ \ \ 0]$$

مثال:-

ليكن $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ جد $V_1 + V_2$, $V_1 - V_2$, $2V_1 + 3V_2$

الحل:

$$V_1 + V_2 = \begin{bmatrix} 1-1 \\ -2+3 \\ 3+2 \\ 0-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} \quad , \quad V_1 - V_2 = \begin{bmatrix} 1+1 \\ -2-3 \\ 3-2 \\ 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$2V_1 + 3V_2 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 12 \\ -12 \end{bmatrix}$$

مثال:-

جد قيم x , y , z اذا علمت ان $\begin{bmatrix} 2 \\ 2x \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y-x \\ -6 \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

الحل:

من جمع المتجهين العموديين في الطرف الايسر نحصل على

$$\begin{bmatrix} 2+y-x \\ 2x-6 \\ -3+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبتساوي المركبات المتناظرة المصفوفتين اعلاه نحصل على المعادلات التالية

$$2x - 6 = 0 \ \dots\dots\dots(1) \quad \Rightarrow x = 3$$

$$2 + y - x = 0 \ \dots\dots\dots(2) \quad \Rightarrow y - x = -2 \Rightarrow y = 1$$

$$-3 + y + z = 0 \ \dots\dots\dots(3) \quad \Rightarrow y + z = 3 \Rightarrow z = 2$$

مثال:-

مخزن للحبوب يحتوي (200طن) حنطة و (100طن) شعير و(14طن) من الرز . فاذا كان سعر الطن الواحد من الحنطة والشعير والرز هي 60 ، 35 ، 150 دينارعلى التوالي جد ثمن الحبوب الموجودة في المخزن .

الحل:

تمثل عدد اطنان الحبوب مركبات لمتجه صفي (A) ونعبر عن ثمن الطن الواحد لكل منها كمركبة لمتجه عمودي (B) وعليه فأن ثمن الحبوب هو $A.B = [\,200 \;\; 100 \;\; 14] \begin{bmatrix} 60 \\ 35 \\ 150 \end{bmatrix}$

$$= (200)(60) + (100)(35) + (14)(150) = 12000 + 3500 + 2100$$
$$= 17600$$

مثال:-

عبر عن المعادلة التالية بحاصل ضرب متجهين $y = 4x_1 + 5x_2 - 3x_3$

الحل:

$$y = [4 \;\; 5 \;\; -3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- **قيمة المتجه**

لكل متجه قيمة واتجاه وان قيمة المتجه هي عدد حقيقي وعليه فأن كان لدينا المتجه

$$A = [a_1 , a_2 , a_3 , \dots \dots \dots \dots , a_n]$$

فأن قيمة المتجه A هي $A = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + \cdots \dots \dots + {a_n}^2}$

مثال:-

لديك المتجهين التاليين $A = [1 \ 4 \ -2 \ 2]$ و $B = [\frac{1}{2} \ \frac{1}{6} \ \frac{2}{3} \ \frac{-1}{6}]$

الحل:

$$A = \sqrt{1 + 16 + 4 + 4} = \sqrt{25} = 5$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{36}{36}} = 1$$