- **التركيب الخطي للمتجهات** (Liner Combination of Vectors)

اذا كانت $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots\ldots, v_m$ متجهات متساوية المراتب واذا كانت $k_1, k_2, k_3, \ldots\ldots\ldots, k_m$ اعداد أ حقيقية لذا يطلق على المتجه

$$V = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + \ \ldots\ldots\ldots + k_mv_m$$

يطلق على V تركيب خطي (Linear Combination) للمتجهات $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots\ldots, v_m$ بالمعاملات $k_1, k_2, k_3, \ldots\ldots\ldots, k_m$

مثال:-

لتكن المتجهات $v_1 = [\,5 \quad 2 \quad -1\,]$, $v_2 = [-4 \quad 11 \quad 0\,]$, $v_3 = [\,7 \quad -18 \quad 3\,]$

واذا كانت معاملات هذه المتجهات هي على التوالي $k_1 = 4$, $k_2 = 3$, $k_3 = -7$ فجد التركيب الخطي لهذه للمتجهات .

الحل:

لذا يكون التركيب الخطي لهذه المتجهات هو $V = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$

$$V = 4[\,5 \quad 2 \quad -1\,] + 3[-4 \quad 11 \quad 0\,] + (-7)[\,7 \quad -18 \quad 3\,]$$

$$= [\,20 \quad 8 \quad -4\,] + [-12 \quad 33 \quad 0\,] + [-49 \quad 126 \quad -21\,]$$

$$V = [-41 \quad 167 \quad -25\,]$$

- **المتجه الصفري (Zero Vector)**

هو ذلك المتجه الذي كل مركباته عباره عن اصفار ويرمز له $\vec{O}$

$$V = [0 \quad 0 \quad 0\,] = \vec{o}$$

- **الأستقلال الخطي والأعتماد الخطي**

(Linearly independent & Linearly dependent)

اذا كان هناك تركيب خطي للمتجهات $v_3, v_2, v_1 \ldots \ldots \ldots \ldots, v_m$ بالمعاملات $k_3, k_2, k_1 \ldots \ldots \ldots \ldots, k_m$ مساوياً الى المتجه الصفري ولم تكن كل المعاملات اصفاراً فعندئذ يقال للمتجهات $v_3, v_2, v_1 \ldots \ldots \ldots \ldots, v_m$ انها معتمدة خطياً (**Linearly dependent**).

اما اذا كانت التركيبة الخطية لهذه المتجهات بالمعاملات اعلاه تساوي المتجه الصفري والمعاملات كلها اصفاراً فعندئذ يقال لهذه المتجهات $v_3, v_2, v_1 \ldots \ldots \ldots \ldots, v_m$ انها مستقله خطياً (**Linearly independent**)

مثال:-

لتكن المتجهات $v_1 = [\ 110 \quad 90\ ]\ ,\ v_2 = [4 \quad 1\ ]\ ,\ v_3 = [\ 2 \quad 3\ ]$

و معاملاتها على التوالي $k_1 = -1\ ,\ k_2 = 15\ ,\ k_3 = 25$ بين هل هذا التركيب الخطي مستقل خطياً او معتمدة خطياً.

الحل:

$$V = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$$

$$V = (-1)[\ 110 \quad 90\ ] + 15[4 \quad 1\ ] + 25[\ 2 \quad 3\ ]$$

$$= [-110 \quad -\ 90\ ] + [60 \quad 15\ ] + [\ 50 \quad 75] = [\ 0 \quad 0\ ]$$

اذا المتجهات $v_3\ ,\ v_2\ ,\ v_1$ معتمدة خطياً

مثال:-

اذا كانت لديك المتجهات

$$v_1 = [\,2 \quad -1 \quad 0 \quad 3\,]\ ,\ v_2 = [1 \quad 2 \quad 5 \quad -1\,],\ v_3 = [\,7 \quad -1 \quad 5 \quad 8\,]$$

و معاملاتها على التوالي $3\ ,\ 1\ ,\ -1$ بين هل هذا التركيب الخطي مستقل خطياً او معتمدة خطياً.

الحل:

$$V = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$$

$$V = 3[\ 2 \quad -1 \quad 0 \quad 3\,] + (1)[1 \quad 2 \quad 5 \quad -1\,] + (-1)[\,7 \quad -1 \quad 5 \quad 8]$$

$$= [6 \quad -3 \quad 0 \quad 9\,] + [1 \quad 2 \quad 5 \quad -1\,] + [-7 \ 1 \quad -5 \quad -8]$$

$$= [\,0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]$$

اذا المتجهات $v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3$ معتمدة خطياً

مثال:-

اذا كانت لديك المتجهات $v_1 = [\ 1 \quad 0 \quad 0\,]\ ,\ v_2 = [\,0 \quad 1 \quad 0\,]\ ,\ v_3 = [\,0 \quad 0 \quad 1\,]$

بين اذا ما كان التركيب الخطي لهذه المتجهات مستقلة خطياً؟

الحل:

التركيب الخطي لهذه المتجهات اذا ما كان مستقل فيجب ان يحقق الصيغة ادناه

$$V = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = [\,0 \quad 0 \quad 0\,]$$

$$= k_1[\ 1 \quad 0 \quad 0\,] + k_2[\,0 \quad 1 \quad 0\,] + k_3[\,0 \quad 0 \quad 1\,] = [\,0 \quad 0 \quad 0\,]$$

$$= [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = [\,0 \quad 0 \quad 0\,]$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

اذا المتجهات $v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3$ مستقلة خطياً

مثال:-

هل المتجهات التالية معتمدة خطياً (Linearly dependent) ؟

$$v_1 = [\,1 \quad -1\,]\ ,\ v_2 = [2 \quad -3]\ ,\quad v_3 = [\,5 \quad 1\,]$$

الحل:

نفرض ان k_1, k_2, k_3 هي معاملات هذه المتجهات بحيث ان

$$k_1[\ 1 \quad -1\ ] + k_2[\ 2 \quad -3\ ] + k_3[5 \quad 1\ ] = [\ 0 \quad 0\ ]$$

من هذا نستنتج

$$k_1 + 2k_2 + 5k_3 = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$-k_1 - 3k_2 + k_3 = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

بجمع (1) و(2) نحصل على

$$-k_2 + 6k_3 = 0$$

اي ان

$$6k_3 = k_2 \ \dots\dots\dots\dots (3)$$

بالتعويض (3) في (1) نحصل على $k_1 + 12k_3 + 5k_3 = 0$

اي ان

$$k_1 = -17k_3 \quad \dots\dots\dots\dots (4)$$

نأخذ $k_3 = 1$ ونعوض في (3) و(4) نحصل على

$$k_1 = -17\ ,\ k_2 = 6\ ,\quad k_3 = 1$$

وبذلك نستنتج ان المتجهات $v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3$ معتمدة خطياً لان معاملاتها لا تساوي صفراً

مثال:-

اثبت ان المتجهات التالية مستقلة خطياً

$$v_1 = [\ 1 \quad 0 \quad 2\ ]\ ,\ v_2 = [\ 0 \quad -1 \quad 3\ ],\qquad v_3 = [\ -2 \quad 0 \quad 1]$$

الحل:

نفرض ان

$$V = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \vec{o} = [\ 0 \quad 0 \quad 0\ ]$$

ونثبت ان هذا يؤدي الى $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ كشرط لتكون هذه المتجهات مستقلة خطياً

$$V = k_1[\ 1 \quad 0 \quad 2\ ] + k_2[\ 0 \quad -1 \quad 3\ ] + k_3[\ -2 \quad 0 \quad 1\ ] = [\ 0 \quad 0 \quad 0\ ]$$

$$= [\ k_1 \quad 0 \quad 2k_1\ ] + [\ 0 \quad -k_2 \quad 3k_2\ ] + [\ -2k_3 \quad 0 \quad k_3\ ] = [\ 0 \quad 0 \quad 0\ ]$$

وعليه

$$k_1 - 2k_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$-k_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2) \qquad \Longrightarrow k_2 = 0$$

$$2k_1 + 3k_2 + k_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

نعوض قيمة $k_2 = 0$ في (3) نحصل

$$2k_1 + k_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

من (1) نحصل على $k_1 = 2k_3$ ونعوضها في (4)

$$2(\ 2k_3) + k_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \therefore k_3 = 0$$

نعوض عن قيمة k_3 في (1) نحصل على $k_1 = 0$

$$\because \qquad k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

علية تكون المتجهات $v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3$ مستقلة خطياً