• القيم الذاتية والمتجه الذاتي (Eigenvalues & Eigenvectors)

اذا كانت A مصفوفة مربعة من نوع $(n \times n)$ والمتجه غير الصفري X يسمى متجهاً ذاتياً للمصفوفة A اذا كانت AX مضاعفاً قياسياً للمتجه X كما في المعادلة التالية.

$$AX = \lambda X$$

حيث (λ) هو العدد القياسي ويسمى متجهاً ذاتياً للمصفوفة A ويقال ل (X) انه متجه ذاتي مناظر للعدد القياسي λ ، كما تسمى القيم الذاتية للمصفوفة A ايضا بالقيم الخاصة او القيم المميزة او الجذور الكامنة للمصفوفة A .

مثال:-

اذا كان لدينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ والمتجه $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ هل المتجة X هو متجة ذاتي للمصفوفةA وما قيمة λ ؟

الحل:

$$AX = \lambda X$$

$$\because AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

هو متجه ذاتي للمصفوفة A وقيمة λ هو 2

وعند كتابة المعادلة

$$AX = \lambda X$$

وترتيب مصفوفتها تكون كالاتي

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots\dots & a_{2n} \\ . & \dots & .\dots\dots & \dots\dots & . \\ . & \dots\dots & \dots. & . & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & \dots\dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}X_1 + & a_{12}X_2 + & \dots & \dots\dots & a_{1n}X_n \\ a_{21}X_1 + & a_{22}X_2 + & \dots & \dots\dots & a_{2n}X_n \\ . & \dots & .\dots\dots & \dots\dots & . \\ . & \dots\dots & \dots. & . & \dots\dots \\ a_{n1}X_1 + & a_{n2}X_2 & \dots\dots & \dots\dots & a_{nn}X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda X_1 \\ \lambda X_2 \\ . \\ . \\ \lambda X_n \end{bmatrix}$$

من تناظر المعاملات للمصفوفتين المتساويتين اعلاه نحصل على

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots \quad \dots\dots \quad a_{1n}X_n = \lambda X_1 \quad \dots\dots\dots\dots(1)$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots \quad \dots\dots \quad a_{2n}X_n = \lambda X_2 \quad \dots\dots\dots\dots(2)$$

$$\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots$$

$$a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots \quad \dots\dots \quad a_{nn}X_n = \lambda X_n \quad \dots\dots\dots\dots(n)$$

ننقل الطرف الأيمن الى الجهة اليسار ونأخذ معاملات المتغير X

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & \dots\dots & a_{2n} \\ . & \dots & .\dots\dots & \dots\dots & . \\ . & \dots\dots & \dots. & . & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & \dots\dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

لأيجاد القيمة الذاتية λ للمصفوفة A من النوع $(n \times n)$ باستخدام المصفوفة الأحادية فان $AX = \lambda X$ تكتب بالصورة التالية

$$AX = \lambda IX$$

$$AX - \lambda IX = 0 \quad \Longrightarrow \quad (A - \lambda I)X = 0 \quad \text{or}$$

$$\lambda IX - AX = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda I - A)X = 0$$

ولكي تكون λ قيمة ذاتية يجب ان تكون لهذه المعادلة حل غير صفري وهذا سيتحقق اذا وفقط اذا

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة للمصفوفة A وتكون الأعداد القياسية المحققة لهذه المعادلة هي القيم الذاتية للمصفوفة A

مثال:-

اوجد القيم الذاتية للمصفوفة التالية $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

الحل:

من طريقة المصفوفة الأحادية

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 3)\lambda — 2(1)$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

وبحل هذة المعادلة كمربع كامل $(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

$$\therefore \ \lambda = 2 \quad \text{or} \quad \lambda = 1$$

وهاتان هما القيمتان الذاتية للمصفوفة A

مثال:-

اوجد القيم الذاتية للمصفوفة A التالية $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

الحل:

$$\lambda I - A = \lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\3 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\3 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\-3 & \lambda-2 & 0\\0 & 0 & \lambda-4\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\-3 & \lambda-2 & 0\\0 & 0 & \lambda-4\end{bmatrix}$$

$$= \left|\begin{matrix}\lambda-2 & -1 & 0\\-3 & \lambda-2 & 0\\0 & 0 & \lambda-4\end{matrix}\right|\begin{matrix}\lambda-2 & -1\\-3 & \lambda-2\\0 & 0\end{matrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-4) + 0 + 0$$

$$-0 - 0 - (-1)(-3)(\lambda-4)$$

$$= (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda-4) - 3(\lambda-4)$$

$$= (\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda^2 + 16\lambda - 16) - 3\lambda + 12$$

$$= \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

لحل مثل هذه المعادلات من الدرجة الثالثة او اكثر فأن احد الحلول لهذه المعادلة.هو احد قواسم الحد الثابت الأخير لذلك في مثالنا الحالي تكون الحلول الوحيدة الممكنه من الاعداد الصحيحة هي قواسم العدد (-4) اي $\mp 1\ ,\ \mp 2\ ,\ \mp 4$

وبالتعويض المتتابع لهذه القيم نجد ان $\lambda = 4$ هو احد حلول الأعداد الصحيحة لهذه المعادلة ونتيجة لذلك فأن $(\lambda - 4)$ يجب ان يكون عاملاً من عوامل الطرف الأيسر لهذه المعادلة . وبقسمة المعادلة على $(\lambda - 4)$ بطريقة القسمة الطويلة نحصل على .

$$\begin{array}{r|l} & \lambda^2 - 4\lambda + 1 \\ \hline \lambda - 4 & \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 \\ \text{بالطرح} & \underline{-\lambda^3 \pm \lambda^2} \\ & -4\lambda^2 + 17\lambda \\ \text{بالطرح} & \underline{\pm 4\lambda^2 \mp 16\lambda} \\ & \lambda - 4 \\ & \mp\lambda \pm 4 \\ \text{بالطرح} & \overline{0 \quad 0} \end{array}$$

$$(\lambda-4)(\lambda^2-4\lambda+1)=0$$

القوس $(\lambda^2-4\lambda+1)$ لا يمكن حله كمربع كامل لذلك يحل بالدستور

$$\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{2(2\pm\sqrt{3})}{2}=2\pm\sqrt{3}$$

اذاً القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda=2+\sqrt{3}$ & $\lambda=2-\sqrt{3}$ & $\lambda=4$