الفصل الثامن

الحركة الدورانية

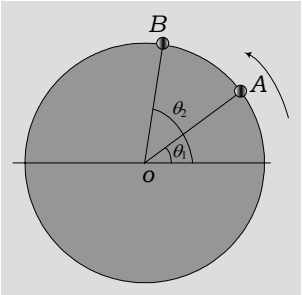
(Rotational Motion)

1-8 تمهيد:

درسنا حتى الآن الحركة الانتقالية (أو الانسحابية) *(translational motion)* للأجسام مغفلين دورانها كليا. إلا أن الحركة العامة للأجسام الصلبة تتألف من انتقال ودوران بنفس الوقت. ومن أهم الحركات في الطبيعة هي الحركات الدورانية، كالأرض حول الشمس، والقمر حول الأرض، والإلكترونات حول النواة في الذرة، وغيرها. لذا نخصص هذا الفصل والذي يليه لدراسة الحركة الدورانية التي يدور فيها جسيم أو منظومة جسيمات حول محور أو نقطة. وكما فعلنا في الحركة الانتقالية، فإننا نبدأ في هذا الفصل بتعريف متغيرات الحركة من موضع وسرعة وتسارع، بينما نبحث في الفصل التاسع عن متغيرات التحريك. فنعرف موضع الجسم في الحركة الدورانية **بالزاوية** التي يدورها، **وسرعته الزاوية** بمقدار الزاوية التي يدورها بواحدة الزمن، كما نعرف **تسارعه الزاوي** بمعدل تغير السرعة الزاوية مع الزمن. ونستخلص العلاقات التي تربط متغيرات الحركة ببعضها، وندرس الحركة بتسارع زاوي ثابت. ونربط أخيرا بين متغيرات الحركة الانتقالية والدورانية.

2-8 السرعة الزاوية المتوسطة *(Average Angular speed)*

نبدأ دراسة الحركة الدورانية لجسيم صغير m يمكن اعتباره نقطة، كما فعلنا في الفصل الثاني، ونفترض أنه يدور على مسار دائري نصف قطره r، كما في الشكل (8-1). فنلاحظ أن موضعه



الشكل (1-8)

الزاوي في أي لحظة يتحدد بالزاوية θ التي يصنعها متجه موضعه الخطي **r** مع محور السينات. فإذا كان الجسيم عند الموضع θ_1 في اللحظة t_1 ثم صار عند θ_2 في اللحظة t_2، عندئذ نجد أنه دار زاوية:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

خلال زمن

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

ومن ثم نعرف **السرعة الزاوية المتوسطة** بالعلاقة:

$$\boxed{\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}} \qquad (1\text{-}8)$$

فالسرعة الزاوية هي الزاوية التي يدورها الجسم في واحدة الزمن، ووحدتها في النظام الدولي هي راديان/ثانية (rad/s)، حيث يساوي الراديان زاوية مقدارها°57 تقريبا ويعطى بشكل أدق بملاحظة أن الدورة الكاملة تعادل:

$$2\pi \text{ rad} = 360° \Rightarrow 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

وكثيرا ماتعطى السرعة الزاوية لجسم يدور بوحدات مختلفة مثل دورة بالدقيقة (rev/min) مثلا، كما ذكرنا في الفصل الثالث، حيث نعرف أن الدورة الواحدة تعادل 2π راديان، لذا يمكن تحويل دروة/دقيقة إلى راديان/ثانية بكتابة:

$$1 \text{ rev/min} = 1(2\pi \text{ rad})/(60 \text{ s}) = (\pi/30) \text{ rad/s}$$

مثل 8-1

تدور الأرض حول نفسها مرة كل 24 ساعة. مامتوسط سرعتها الزاوية؟

الحل: نلاحظ أن الزاوية الممسوحة خلال 24 ساعة هي °360 أي 2π ونكتب:

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi(\text{rad})}{24(\text{h})} = \frac{2\pi(\text{rad})}{86400(\text{s})}$$

أي أن:

$$\omega_{av} \approx 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

3-8 السرعة الزاوية اللحظية *(Instantaneous Angular speed)*

لحساب السرعة الزاوية لجسم يدور على مسار دائري في لحظة معينة، أي **السرعة الزاوية اللحظية**، نجعل النقطتين A وB في الشكل (8-1) تقتربان من بعضهما بشكل كبير لتنطبقا في النهاية على بعضهما، عندئذ تصير الزاوية $\Delta\theta$ والزمن Δt غاية في الصغر بحيث نكتب:

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}} \qquad (2\text{-}8)$$

وكما وجدنا في الفصل الثاني، فيمكن معرفة الزاوية التي دارها جسم من سرعته اللحظية (8-2) بإجراء التكامل:

$$\theta = \int \omega dt \qquad (3\text{-}8)$$

وإذا تحرك الجسم بسرعة زاوية ثابتة ω عندئذ تصير الزاوية θ التي يدورها في زمن t معطاة بالعلاقة البسيطة:

$$\boxed{\theta = \omega t} \qquad (4\text{-}8)$$

مثال 8-2

يتحرك جسم على مسار دائري بسرعة زاوية متغيرة بحيث تعطى الزاوية التي يدورها خلال زمن t بالعلاقة $\theta = -2t + t^2$ rad. (أ) ما السرعة الزاوية المتوسطة للجسم بين اللحظتين t_1=0 وt_2=3 s؟ (ب) ما السرعة الزاوية اللحظية للجسم عندما t=0؟

الحل: (أ) لتحديد السرعة الزاوية المتوسطة نحسب الزاوية التي كان عندها الجسم في اللحظتين المذكورتين:

$$\theta(t_1) = \theta(0) = 0\,\text{rad}$$

و

$$\theta(t_2) = \theta(3) = 3\,\text{rad}$$

لذا نجد السرعة الزاوية المتوسطة بكتابة:

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{(3-0)\ \text{rad}}{(3-0)\ \text{s}} = 1\ \text{rad/s}$$

(ب) نجد السرعة الزاوية اللحظية في أي لحظة من (8-2) فنكب:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -2 + 2t$$

فيكون في اللحظة $t=0$: $\omega(0) = -2\,\text{rad}$

ومن المهم أن نلاحظ أن كون السرعة الزاوية سالبة يعني أنه يدور بعكس الاتجاه الموجب المفترض (مع أو بعكس عقارب الساعة) ولاعلاقة له بتسارع أو تباطؤ الجسم خلال دورانه.

4-8 التسارع الزاوي المتوسط واللحظي *(Angular Acceleration)*

لحساب التسارع الزاوي لجسم يدور نستخدم الشكل (8-1) ونفترض أن السرعة الزاوية اللحظية عند النقطة A (أي في اللحظة t_1) هي ω_1 وعند B (أي في اللحظة t_2) هي ω_2، عندئذ نعرف **التسارع الزاوي المتوسط** بين هاتين اللحظتين بالعلاقة:

$$\boxed{\alpha_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}} \qquad (5\text{-}8)$$

ونلاحظ أن وحدة التسارع الزاوي هي وحدة سرعة زاوية على زمن، أي (rad/s^2).

ويمكن تحديد التسارع الزاوي للجسم عند نقطة معينة أو في لحظة معينة، أي **التسارع الزاوي اللحظي**، كما فعلنا في حالة السرعة الزاوية، بجعل الفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1 \to 0$ في (5-8) وعندها نكتب:

$$\boxed{\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}} \qquad (6\text{-}8)$$

ونلاحظ مما تقدم التشابه الواضح بين متغيرات الحركة الانتقالية والدورانية مما يجعل حل التمارين في الحركة الدورانية مماثل تماما للحركة الانتقالية، وستتوضح هذه النقطة في الفقرات القادمة بشكل جلي.

5-8 الحركة الدورانية بتسارع زاوي ثابت

وجدنا في الفصل الثاني أنه إذا تحرك جسم بتسارع خطي a ثابت فإن معادلات الحركة تصير سهلة وتعطى بالعلاقات (2-18) و(2-19) و(2-20). وبنفس المنطق إذا دار جسم بتسارع زاوي α ثابت فإننا نكتب معادلات الحركة لها بالشكل:

$$\boxed{\begin{cases} \omega = \alpha t + \omega_0 \\ \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}} \qquad (7\text{-}8)$$

وتوضح الأمثلة التالية سهولة استخدام العلاقات السابقة لتحديد متغيرات الحركة لجسم يدور بتسارع زاوي ثابت.

مثل 8-3

يدور حجر طاحون بتسارع زاوي ثابت بدءا من السكون زاوية 120° خلال 5 s. جد السرعة الزاوية المتوسطة للحجر وسرعته الزاوية اللحظية عندما t=5 s وتسارعه الزاوي المتوسط.

الحل: (أ) نطبق العلاقة (8-1) ونكتب:

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{120°}{5\,\text{s}} = \frac{120(\pi/180)\text{rad}}{5\,\text{s}} = \frac{2\pi}{15}\ \text{rad/s}$$

(ب) نحسب السرعة الزاوية اللحظية بالاستفادة من كون التسارع الزاوي ثابت حيث ترتبط السرعة الزاوية المتوسطة في هذه الحالة بالسرعتين اللحظيتين ω_1 وω_2 في اللحظتين t_1 وt_2، بالعلاقة:

$$\omega_{av} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \qquad (8\text{-}8)$$

وبتعويض $\omega_{av} = 2\pi/15\,\text{rad/s}$ و $\omega_1 = 0\,\text{rad/s}$ في هذه العلاقة نجد $\omega_2 = 4\pi/15\,\text{rad/s}$.

(ج) أخيرا نحسب التسارع الزاوي من (8-5) ونكتب:

$$\alpha = \alpha_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{4\pi}{75}\ \text{rad/s}^2$$

حيث وضعنا التسارع الزاوي اللحظي مساويا للتسارع الزاوي المتوسط لأنه ثابت.

مثل 8-4

تدور حلقة بتسارع زاوي ثابت 3 rad/s² زاوية 120 rad خلال أربع ثواني. ما السرعة الزاوية الابتدائية للحلقة وكم تستغرق للوصول لهذه السرعة إذا بدأت من السكون؟

الحل: نستخدم معادلات الحركة بتسارع زاوي ثابت ونكتب:

$$\theta = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \quad \Rightarrow \quad \theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$$

حيث $\theta - \theta_0$ الزاوية التي دارها الجسم خلال الزمن t (أي الإزاحة الزاوية). وبتعويض هذه الكميات نجد:

$$120\,\text{rad} = \tfrac{1}{2}(3\,\text{rad/s}^2)(4\,\text{s})^2 + \omega_0(4\,\text{s})$$

أي أن
$$\omega_0 = 24\,\text{rad/s}$$

أخيرا إذا بدأ الجسم دورانه من السكون نكتب:

$$\omega = \alpha t + \omega_0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = 8\ \text{s}$$

6-8 العلاقة بين متغيرات الحركة الدورانية والحركة الانتقالية

من المفيد جدا أن نربط بين متغيرات الحركتين الانتقالية والدورانية لنلاحظ التناظر التام بينهما، مما يسهل فيما بعد استخلاص معادلات التحريك الدوراني مباشرة. ولذلك نفترض أن لدينا جسما يدور على مسار دائري نصف قطره r، كما في الشكل (8-2). فنلاحظ أنه يقطع مسافة خطية s عندما يدور زاوية θ بحيث أن:

$$\boxed{s = r\theta} \tag{9-8}$$

حيث تقدر θ بالراديان دوما.

وباشتقاق العلاقة السابقة بالنسبة للزمن نجد:

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

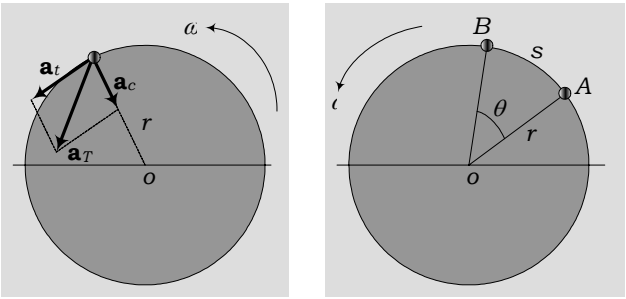
ولكن
$$v = \frac{ds}{dt}$$

هي السرعة الخطية التي يتحرك بها الجسم على المسار الدائري، بينما

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

هي السرعة الزاوية التي يدور بها، ولذلك نكتب:

$$\boxed{v = r\omega} \tag{10-8}$$



الشكل(8-2)

وبنفس الشكل نربط بين التسارع الخطي a والزاوي α باشتقاق (8-10) فنجد:

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

وبملاحظة أن $dv/dt = a_t$ هو التسارع المماسي للجسم على المسار الدائري و $d\omega/dt = \alpha$ هو التسارع الزاوي، نكتب:

$$\boxed{a = r\alpha_t} \qquad (8\text{-}11)$$

ونركز هنا أن التسارع الخطي المعني في هذه العلاقة هو التسارع المماسي فقط الذي يدل على تغير قيمة السرعة الخطية للجسم. لأنه إذا دار بسرعة خطية v ثابتة عندئذ يكون تسارعه المماسي dv/dt معدوما لكن تسارعه المركزي v^2/r لايساوي الصفر، ومع ذلك فإن تسارعه الزاوي يكون مساويا للصفر لأن سرعته الزاوية، مثل سرعته الخطية، ثابتة. فإذا دار الجسم بسرعة خطية ثابتة ينعدم تسارعه المماسي والزاوي ويبقى تسارعه المركزي الذي يدل على تغير اتجاه حركته والمعطى بالعلاقة:

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r} \qquad (8\text{-}12)$$

أخيرا نلخص في الجدولين 8-1 و8-2 العلاقة بين متغيرات الحركة الانتقالية والدورانية لتوضيح التناظر في قوانين الحركة بين الحالتين.

مثل 8-5

تتسارع أسطوانة موسيقية نصف قطرها 15 cm بدءا من السكون فتصير سرعتها 33 دورة بالدقيقة خلال 60 s. (أ) ما السرعة والتسارع الخطيين لنقطة على محيطها؟ (ب) ما التسارع الزاوي لهذه النقطة؟

الحل: لحساب السرعة الخطية نستخدم $v=r\omega$ حيث نضع:

$$\omega = 33\,\text{rev/min} = 33(2\pi\,\text{rad}/60\,\text{s}) = 3.45\,\text{rad/s}$$

فنجد:

$$v = r\omega = (0.15\,\text{m})(3.45\,\text{rad/s}) = 0.52\,\text{m/s}$$

(ب) لحساب التسارع المركزي لهذه النقطة نكتب:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = 1.8\,\text{m/s}^2$$

(ج) أخيرا نجد التسارع الزاوي للاسطوانة من العلاقة:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0.06\,\mathrm{rad/s^2}$$

الجدول 8-1 العلاقة بين متغيرات الحركة الانتقالية والدورانية

المتغيرات	انتقال	دوران	العلاقة
الموضع	s	θ	$s=r\theta$
السرعة	v	ω	$v=r\omega$
التسارع	a	α	$a=r\alpha$

الجدول 8-2 التناظر في قوانين الحركة الانتقالية والدورانية بتسارع ثابت

الحركة الانتقالية	الحركة الدورانية
$v = at + v_0$	$\omega = \alpha t + \omega_0$
$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$	$\alpha = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$
$v^2 - v_0^2 = 2as$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$

ملخص الفصل

السرعة الزاوية المتوسطة $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

السرعة الزاوية اللحظية $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

التسارع الزاوي المتوسط $\alpha_{av} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$

التسارع الزاوي اللحظي $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

الحركة بتسارع زاوي ثابت
$$\left.\begin{aligned} \omega &= \alpha t + \omega_0 \\ \theta &= \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ \omega^2 - \omega_0^2 &= 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned}\right\}$$

تمارين ومسائل

متغيرات الحركة الدورانية

8-1 ما الزاوية التي يحددها قوس طوله 3 m من دائرة نصف قطرها 2m؟

8-2 ماطول القوس المحدد بالزاوية 0.6 rad في دائرة نصف قطرها 2m؟

8-3 ما السرعة الزاوية لدولاب يدور 4800 دورة بالدقيقة مقدرة بالراديان لكل ثانية؟

8-4 تدور مروحة طائرة قطرها 60 cm بسرعة 2000 rev/min في الوقت الذي تطير فيه الطائرة أفقيا بسرعة 480 km/h. ماسرعة نقطة على طرف المروحة بالنسبة للطيار والأرض؟

8-5 ما السرعة الزاوية لعقرب الساعات والدقائق والثواني في الساعة اليدوية العادية؟

8-6 تدور سفينة فضاء في مسار دائري نصف قطره 3500 km بسرعة 2000 km/h. (أ) ما السرعة الزاوية للسفينة؟ (ب) ما التسارع المركزي والمماسي للسفينة؟

8-7 ماالسرعة الخطية لنقطة على محيط قرص قطره 40 cm يدور بسرعة 2000 rev/min؟

8-8 تدور الأرض حول الشمس في مسار شبه دائري نصف قطره 150 مليون كم تقريبا. ما السرعة الخطية والزاوية للأرض وما تسارعها المركزي؟

الحركة الدورانية

8-9 ما التسارع المركزي لنقطة على طرف قرص قطره 0.6 m يدور بسرعة 33.3 rev/min؟

8-10 يتسارع قرص بدءا من السكون لسرعة 20,000 rev/min خلال 5 دقائق. ما متوسط تسارعه؟

قوانين الحركة الدورانية

8-11 تتناقص السرعة الزاوية لمروحة طائرة من 300 rev/min إلى 225 rev/min خلال دقيقة واحدة. (أ) مامتوسط سرعتها وتسارعها الزاويين؟ (ب) ما الزمن اللازم للمروحة وما عدد الدورات التي ستدورها لتقف بدءا من سرعتها الأولى؟

8-12 تعطى زاوية دوران حلقة بالعلاقة: $\theta = 5t + 3t^2 - 4.5t^4$ rad. ما السرعة والتسارع الزاويين للحلقة عندما t=2 s وt=3 s وما السرعة الزاوية المتوسطة خلال هذه الفترة؟

8-13 يدور إطار 60 دورة في 10 s لتصير سرعته الزاوية 10 rev/s. (أ) ماسرعته الزاوية الابتدائية؟ (ب) ما الزمن اللازم للإطار للوصول لسرعته الابتدائية إذا بدأ حركته الكلية من السكون؟

14-8 تتغير السرعة الزاوية لمحرك من 1200 rev/min إلى 300 rev/min خلال 12 s. ما متوسط تسارعه الزاوي وعدد الدورات التي يدورها إلى أن يقف؟

15-8 تسير سيارة نصف قطره كل إطار فيها 0.5 m بسرعة 80 km/h وبعد 55 دورة تصير سرعتها 55 km/h. (أ) ما التسارع الزاوي للإطارات؟ (ب) ما الزمن اللازم للسيارة لتقف؟

16-8 تتباطأ أسطوانة من سرعة 78 rev/min لتقف بعد 30 s. (أ) ماتسارعها الزاوي؟ (ب) ماعدد الدورات التي دارتها الاسطوانة لتقف؟

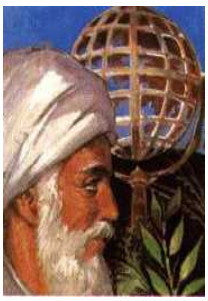
17-8 يدور محرك بخاري بسرعة 150 rev/min عندما ينطفئ ويتوقف بعد 2.2 h. (أ) ما متوسط تسارعه الزاوي؟ (ب) ماعدد الدورات التي دارها ليتوقف؟ (ج) ما التسارع المماسي لنقطة تقع على بعد 50 cm من مركزه عندما كان يدور بسرعة 78 rev/min؟ (د) ما التسارع الكلي للنقطة المذكورة في (ج) في تلك اللحظة؟

18-8 (أ) ما السرعة الزاوية لإطار سيارة تسير بسرعة 80 km/h على خط مستقيم إذا كان نصف قطره 37.5 cm؟ (ب) ما التسارع الزاوي للإطار إذا توقفت السيارة بعد 30 دورة بدون انزلاق؟ (ج) ما المسافة التي ستقطعها السيارة لتقف؟

19-8 تدور حلقة $10°$ خلال 0.25 s بدءا من السكون. ما الزمن اللازم لتصل لسرعة 33 rev/min؟

20-8 ما أكبر سرعة زاوية يمكن أن تدور بها اسطوانة حتى لاتنزلق عنها قطعة نقود كتلتها M موضوعة على بعد R من مركزها، إذا كان معامل الاحتكاك السكوني بينهما μ_s؟

من علماء الإسلام



البيروني

محمد بن أحمد المكنى بأبي الريحان **البيروني** (362هـ - 440 هـ). كتب في الرياضيات والفلك والجغرافيا والفيزياء والفلسفة والطب والشريعة والأدب واللغة، وفترك ما يقارب مائة مؤلف مثل القانون المسعودي في الهيئة والنجوم، واستخراج الأوتار في الدائرة، واستيعاب الوجوه الممكنة في صفة الإسطرلاب، والعمل بالإسطرلاب، والتطبيق إلى حركة الشمس، وغيرها. وأكد قبل كوبرنيكوس (الذي ينسب إليه بأنه أول من قال عن حركة الأرض حول نفسها وحول الشمس) بخمسمائة عام بشكل واضح أن الأرض تدور حول نفسها وتدور مع الكواكب والنجوم حول الشمس مما يسبب تفاوت الليل والنهار. وتوصل إلى استخراج الثقل النوعي لكثير من الأجسام الصلبة والسائلة مستعينا بمبدأ أرخميدس، وابتكر آلة سماها "الميزان الطبيعي" وهي أقدم آلة استعملت لقياس الثقل النوعي وأعطت نتائج مذهلة تتناسب تقريبا مع الأرقام الحديثة.